ΑΛΓΕΒΡΑ Ι - ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΣΕΜΦΕ, 7ο Εξάμηνο, ακ. έτος 2014-15

1. Έστω σύνολο G εφοδιασμένο με μία προσεταιριστική διμελή πράξη $*$ η οποία επιπλέον ικανοποιεί τα αξιώματα:
α) Υπάρχει ένα *αριστερό ταυτοτικό στοιχείο* $e \in G$, τέτοιο ώστε $e * g = g \; \forall g \in G$.
β) $\forall g \in G$ υπάρχει ένα *αριστερό αντίστροφο* $g' \in G$, έτσι ώστε $g' * g = e$.
Δείξτε ότι η $(G, *)$ είναι ομάδα.

2. Εστω G το σύνολο των 2×2 πραγματικών πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα. Ορίζουμε ως γινόμενο δύο στοιχείων του G τον συνήθη πολ/σμό πινάκων. Δείξτε ότι η G είναι ομάδα και ότι το σύνολο O των 2×2 πραγματικών ορθογωνίων πινάκων είναι υποομάδα της G. (Ένας πίνακας A είναι *ορθογώνιος* αν $AA^T = I$, όπου A^T ο ανάστροφος του A.) Εξετάστε εάν η O είναι κανονική.

3. i) Έστω G ομάδα. Το σύνολο $Z(G) = \{z \in G \,|\, zg = gz \, \forall \, g \in G\}$ λέγεται *κέντρο* της G. Δείξτε ότι το $Z(G)$ είναι υποομάδα της G και μάλιστα κανονική.
ii) Βρείτε το κέντρο της ομάδας $D_4 = \{e, r, r^2, r^3, a, b, c, d\}$ των συμμετριών του τετραγώνου.

4. Κατασκευάστε ομομορφισμούς ομάδων:
i) από την $\mathbb{Z}_{12}$ στην $\mathbb{Z}_4$.
ii) από την $\mathbb{Z}_6$ στην $\mathbb{Z}_4$.
iii) από την $\mathbb{Z}_5$ στην $\mathbb{Z}_4$.
Βρείτε για τον κάθε ομομορφισμό τον πυρήνα και την εικόνα του. Τι παρατηρείτε;

Παράδοση: Πέμπτη 18 Δεκεμβρίου 2014.

Σ. Λαμπροπούλου